

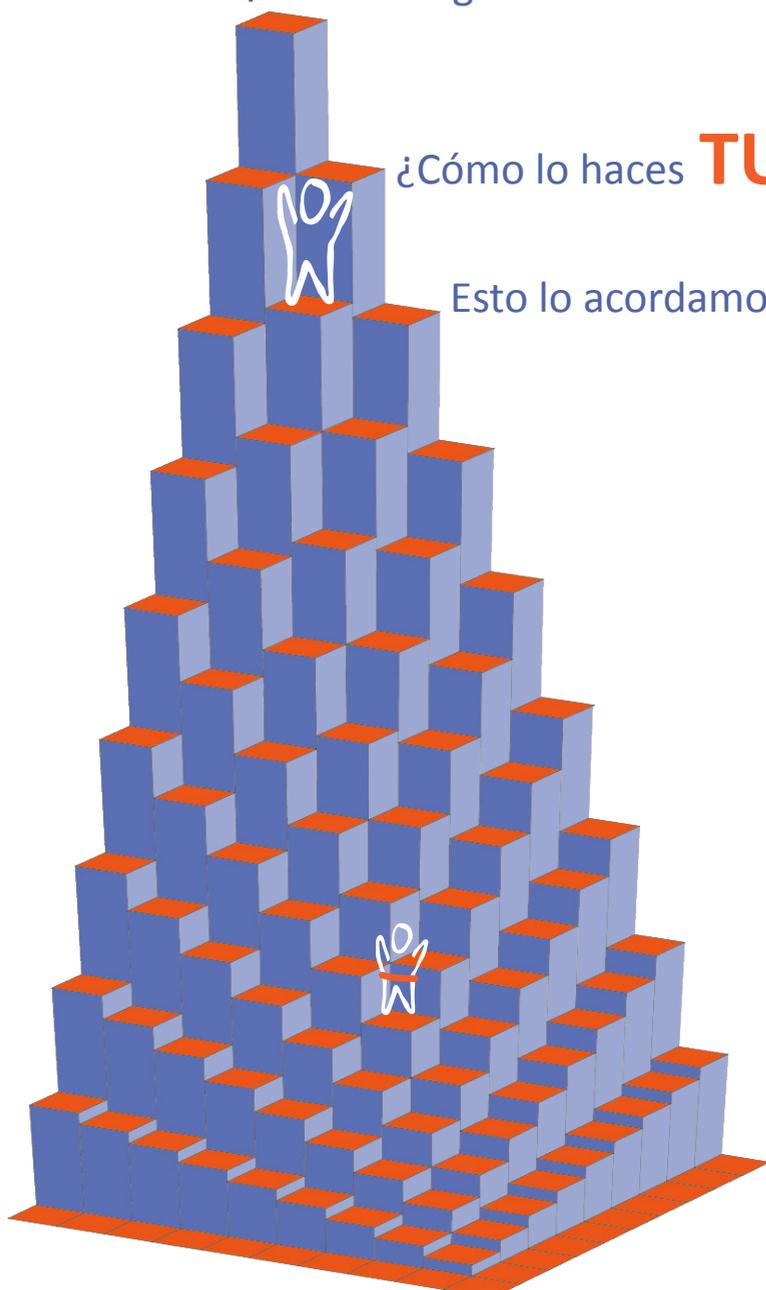
Expedición al Monte Cálculo

Lenguaje y matemática para primaria

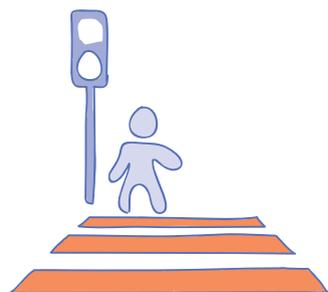
¡YO lo hago así!

¿Cómo lo haces TU?

Esto lo acordamos **nosotros.**



Dos figuras han tomado el camino más inclinado del Monte Cálculo. Han alcanzado puntos diferentes. ¿A dónde han llegado?



Un cuento animado desde el libro para la escuela primaria.

Urs Ruf y Peter Gallin, 1995: Ich mache das so! Wie machst Du es?

Das machen wir ab.

(¡Yo lo hago así! ¿Cómo lo haces tú? Esto lo acordamos nosotros.) Lehrmittelverlag des Kantons Zuerich, Suiza.

La versión en español fue motivado por conversaciones entre Peter Gallin y Martin Carnap sobre la construcción del Monte Cálculo (Mallandschaft), su orientación hacia conocimientos y competencias en lenguaje y matemáticas iniciales. El libro es para niños de primaria, sus profesores y sus padres. Sus textos e ilustraciones introducen la importancia de secuencias, la adición y las tablas de multiplicación. Este texto es un ejemplo práctico para el aprendizaje dialógico.

En la enseñanza concebida según el sistema dialógico, la idea fundamental es que la porción de la materia que la persona instructora ofrece a los y las aprendices, debe comprender aproximadamente la misma extensión de tiempo y de contenido que el uso; es decir, la cantidad de actividades escolares que se expresan en la participación estudiantil durante las clases.

El concepto dialógico se sitúa, por lo tanto, como eje entre la instrucción y la construcción, adhiriéndose de este modo a los tres hallazgos científicos que estipulan que la difusión del conocimiento es altamente eficiente; que el aprendizaje es un proceso activo y constructivo; y que el aprendizaje auto-administrado brinda un aprovechamiento flexible y de larga duración de lo aprendido.



Mas en Peter Gallin, 2012

“Introducción al Aprendizaje Dialógico y su principio básico: Yo - Tu - Nosotros”

Introducción al Aprendizaje Dialógico y su principio básico: Yo - Tu - Nosotros

Peter Gallin, Universidad Zúrich, Suiza. En la enseñanza concebida según el sistema dialógico, la idea fundamental es que la porción de la materia que la persona instructora ofrece a los y los aprendices, debe comprender aproximadamente la misma extensión de tiempo y de contenido que el uso; es decir, la cantidad de actividades escolares que se expresan en la participación estudiantil durante las clases. El concepto dialógico se sitúa, por lo tanto, como eje entre la instrucción y la construcción, adhiriéndose de este modo a los tres hallazgos científicos que estipulan que la difusión del conocimiento es altamente eficiente; que el aprendizaje es un proceso activo y constructivo; y que el aprendizaje auto-administrado brinda un aprovechamiento flexible y de larga duración de lo aprendido.

La figura No. 1 representa un esquema del desarrollo de una enseñanza dialógica, donde la idea general y el enunciado son los elementos que ofrece la persona instructora, mientras que el desarrollo de aprendizaje y la realización están totalmente dedicados al modo en que los y las aprendices ven el asunto y sus reacciones. Las normas son de cierta manera el objetivo del curso y, en el caso ideal, se deberían poder alcanzar de una simbiosis de la oferta y el uso.



<http://metaaccion.com/metaaccionmagazine/>

Primera Edición, agosto del 2014

Derechos reservados 2014, Peter Gallin y Urs Ruf, Suiza.

Derechos reservados de la edición traducida, 2014 Metaaccion S.A.

Libros y artículos de metaacción, pueden ser adquiridos en América Latina, para uso educativo y comercial. Dirijase para más información a Metaaccion, S.A. Costa Rica. www.metaaccion.com

Peter Gallin y Urs Ruf, Suiza.

editado en español por Metaaccion, S.A. Costa Rica.

¡Yo lo hago así!

¿Cómo lo haces tú?

Esto lo acordamos nosotros.

Lenguaje y matemática para primaria

Expedición al Monte Cálculo

Así se puede,

aunque funciona también de otra manera.

¡No solicite la regla!

pero acomoda las cosas.

Investiga solamente después cómo lo han hecho los demás.

¡No es la verdad!

Muchas veces no podemos hacer las cosas de otra manera.
Aquí está el padre, quien nos dice lo que está permitido.
Allá está la madre, quien nos dice lo qué deberíamos hacer.
Los compañeros mayores nos muestran obligaciones.
La profesora dice qué no se puede hacer.
Siempre tenemos que obedecer a las reglas.



Justo

Muchas veces no podemos ser como queremos.
Muchas veces, también es bueno
que sepamos qué se tiene que hacer.



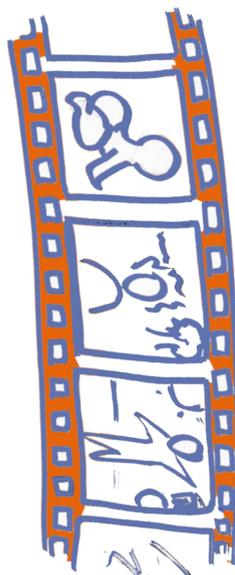
Está, por ejemplo, el tiempo.
Corre siempre hacia adelante, nunca hacia atrás.
Y nuestra vida, igualmente, corre junto al tiempo.
Con esto crecemos un poco día a día.
Esto se nota cuando hojeamos una colección de
fotos familiares.
¿Ya te has dado cuenta cuáles imágenes aparecen
más adelante?
¿Y cuáles imágenes aparecen más atrás?
¿Tiene que ser así?

Fotos antiguas

Busca tres fotos de ti que muestren
tu proceso de crecimiento

Presta estas fotos a otro niño u otra niña,
y observa si puede colocarlos en la secuencia correcta.

Anota para cada foto una frase
que acompañe la foto en tu diario de aprendizaje.
**Ver diario de aprendizaje desde la página 42*



No solo en fotos miras
como has crecido y cambiado;
Lo ves también hojeando tus antiguos cuadernos.
¿Te recuerdas el esfuerzo que hacías
para escribir las primeras letras?

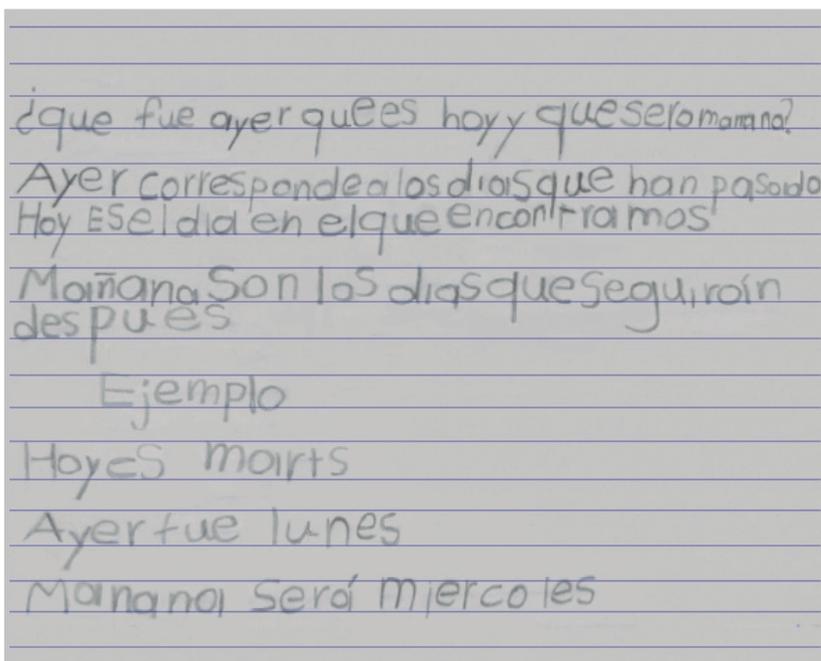


Hoy en día la escritura es mucho más fácil.
También quienes leen tus textos entienden con mayor
facilidad.
¿Ya has pensado una vez, que logras hacer mejor que antes?

Comparar textos

Compara tres escritos de Diego.
Uno de ellos se hizo en la fecha 23 de junio de 2013,
el otro en la fecha 15 de noviembre de 2013.
Y otro fué hecho en la fecha 17 de abril de 2013.
¿Puedes averiguar, cuál fecha va con cual texto?

UN día estaba en la casa de mi
Tia estaba saltando con mi primo en la
cama y me resbale pegue con un tornillo
y me abri el brazo y me dolio mucho.



¿Qué ha aprendido Diego?

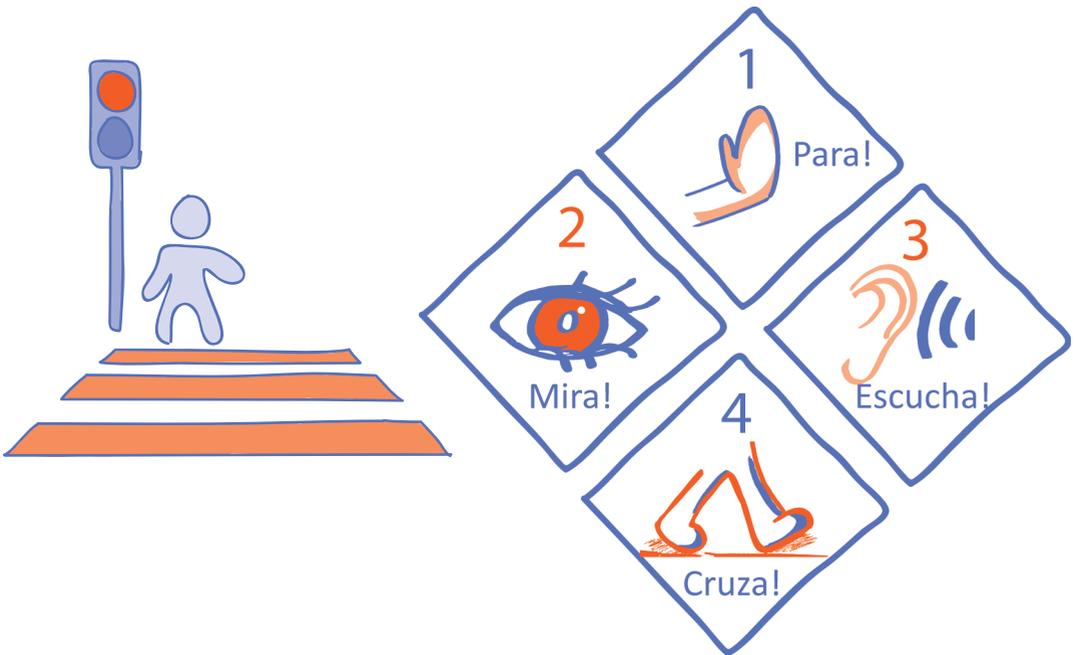
Anota todo lo que puedas de lo que ha mejorado Diego.

¿Encuentras en tus cuadernos escolares tres ejemplos?

Anota tus avances más importantes,
en tu diario de aprendizaje.

Siempre paso por paso.
Así es también en el tráfico:
Para, mira, escucha, cruza.

Tú conoces esta regla.
Sin embargo sabes también,
que tienes que seguir esta regla,
si quieres ganar un poco más de edad.
Pero... ¿Los pensamientos son libres?
¿Sabías que con las cuatro palabras de esta regla
se pueden construir veinticuatro reglas?



Así se puede, aunque funciona también de otra manera

¡Pero cuidado! Casi todas estas reglas son peligrosas.
¿Cuáles son? ¡Táchalas!



En la tabla con las 24 reglas que dan aún algunos vacíos. ¿Puedes llenarlos? ¿Encuentras la secuencia correcta de las palabras?

Para Mira Escucha Cruza	Para Mira Cruza Escucha	Para Escucha Mira Cruza	Para Escucha Cruza Mira	Para Cruza Mira Escucha	Para Cruza Escucha Mira
Mira Para Escucha Cruza	Mira Para Cruza Escucha	Mira Escucha Cruza Para	Mira Escucha Para Cruza	Mira Cruza Para Escucha	Mira Cruza Escucha Para
Escucha Para Mira Cruza	Escucha _____	Escucha _____	Escucha _____	Escucha _____	Escucha _____
Cruza _____	Cruza _____	Cruza _____	Cruza _____	Cruza _____	Cruza Escucha Mira Para

En la escuela por suerte no es tan peligroso como en el tráfico.

Mucho de la escuela pasa

solamente en la cabeza o sobre papel.

Esto es el mundo del pensamiento y la fantasía.

Aquí tu puedes hacerlo así o también de otra manera!

Y es muy importante,

pensar siempre de nuevo,

si se quiere hacer así o si será de otra manera,

más fácil y más cómoda.

Quien siempre piensa bien

cómo se pueden acomodar las cosas,

puede ganar mucho tiempo.

Sin embargo, lo que es cómodo para uno,

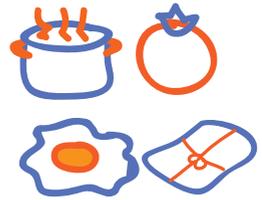
puede ser incómodo para otro u otra.

Observa entonces una vez,
cómo se prepara el desayuno en tu casa.
¿Lo hacen todos de la misma manera?
Tal vez al final,
hay siempre lo mismo en la mesa.
Pero en un caso colocan la leche primero,
en otro se coloca los plátanos fritos primero.
Cada uno tiene su secuencia favorita.



Secuencias cómodas

¿Ya has preparado alguna vez el desayuno?
¿En qué secuencia has hecho este trabajo?

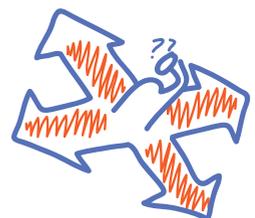


Observa a una persona.
Anota exactamente
en qué secuencia esta persona toma las cosas en sus manos.

Compara tu lista con la lista de otros niños y niñas.
¿Has olvidado algo importante?
Entonces completa tu lista.

Inventa una persona que quiera preparar el desayuno,
exactamente de la manera que está descrita en la lista.
En medio del trabajo pasa algo inesperado.
Ahora todo va en desorden y los pasos se confunden.
Cuenta la historia.

**Muchos caminos te llevan al objetivo, también a los cálculos.
Con los cálculos estás libre.
Los cálculos se pueden siempre hacer de una manera,
pero también de otra.
Es muy importante que cada un
y una descubra
su secuencia preferida.
Lo que es normal o cómodo para uno,
puede ser muy incómodo para ti.
En tal caso es beneficioso,
si te tomas mucho tiempo con cada nuevo cálculo.**



Tienes que recordar eso.

Déjate mucho tiempo con cada nuevo cálculo.

Nunca preguntes primero por la regla.

No mires cómo lo hacen los demás.

Acomoda el camino del cálculo, primero con toda tranquilidad para ti mismo y en la forma que te guste.

Un cálculo se puede hacer de diferentes formas.

¿Cómo calculas $9 + 8 = \square$?

¿Puedes explicarlo paso por paso?

¿Cuáles fueron tus pensamientos?

Existen realmente muchas formas de pensar el cálculo $8 + 9 = \square$.

Si no conoces inmediatamente que el resultado es 17, puedes tomar un pequeño desvío.

También $7 + 8 = \square$ es para muchos una tarea difícil. Pero con este cálculo lo puedes hacer así, o también de otra manera.

Un niño inicia con 7 y sigue contando 8 números más. Otra niña sabe con mucha seguridad que sumando $7 + 10$ da 17, y resta 2 para tener el resultado. Otro niño recuerda la canción del Kinder :

$1 + 1 = 2$, $2 + 2 = 4$, $4 + 4 = 8$, $8 + 8 = 16$.

le resta 1 al último 8 (que faltaba al 7) y obtiene el resultado, como con la ayuda de un buen vecino.

Ya que $7 + 8$ es muy cercado al $8 + 8$, le ayuda la letra de esta canción.

¿Cuál desvío cómodo te lleva más rápido y seguro a la meta?

Transición de décimo

Recuerdas aún el primer cálculo,
donde tuviste un resultado mayor a 10?
¿Cómo manejabas entonces este cálculo?

¿Qué piensas hoy en momentos de calcular,
cuando números pasan las decenas o incluso las centenas?
Por ejemplo; $37 + 18 = \square$ o $539 + 283 = \square$.
Anota tus pensamientos.

¿Lo calculas así, por que otros te lo mostraron?
¿Es realmente cómodo para ti?
¿Podrías imaginártelo de otra manera?

**Sabes ahora, por qué vale la pena
tomarte tiempo con los cálculos y acomodar todo bien?**

Todos los cálculos tienen muchos vecinos.

**Cuando solamente calculas el resultado,
y no piensas en algo más,
entonces no conoces de ninguna manera,
algo sobre el vecindario de este cálculo.
No vas a conocer los vecinos en absoluto,
y no te puedes crear una imagen del ambiente
en el cual vive este cálculo.**



**Junto con estos vecinos,
el cálculo tiene un barrio de residencia muy vivo.
Cuando uno no maneja solamente el cálculo,
cuando uno se ocupa también de los vecinos,
cuando investiga el área en todas las direcciones,
entonces conoce toda un área de las matemáticas.
De repente uno se siente como en casa en este ambiente,
en el que vive este cálculo.**

Existen cálculos que se miran muy amigables.

¿Existen también cálculos, que te dan miedo?

**A muchos niños no les gusta mucho el cálculo $13 - 7 = \square$.
es para ellos un cálculo horrible.**

Los cálculos horribles tienen vecinos amigables.

Vecindad

Seguro conoces cálculos horribles.
¡Anótalos!

Realmente ¿qué te enoja de ellos?

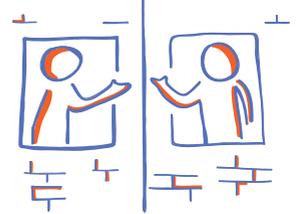
Compara tus cálculos
con cálculos horribles de otros niños y niñas.
¿Puedes averiguar por qué el mismo cálculo
es cómodo para unos y horrible para otros?

¿Acaso tus cálculos horribles, tienen vecinos amigables?
¿Viven ellos muy cerca o un poco más lejos?
¿Puedes describir un pequeño vecindario de cálculos?

**Los cálculos tienen vecinos.
Los cálculos viven en un paisaje.
Igual que nosotros, los humanos.
Tal vez vives en un barrio de una gran ciudad.
Tal vez vives en una pequeña ciudad.
Tal vez vives en un pueblo en el campo.
Donde vives, te sientes en casa.
En casa lo conoces todo muy bien.
Donde vives no te extravías.
Porque ya has explorado acá y allá,
conoces las partes bonitas y las peligrosas.
Y sabes también cómo llegar más rápido
de un lugar al otro.
Lo mismo pasa en las matemáticas.**



Si no te concentras solo en un cálculo,
 si te ocupas también de los cálculos vecinos,
 si exploras en todas las direcciones de la vecindad,
 entonces conoces toda un área de las matemáticas.
 De repente nos sentimos como en casa,
 en donde vive el cálculo.
 Ya no nos desviamos tan fácil.
 También podemos hacer movimientos
 rápidos, si queremos.
 Y solo pocas veces cometemos errores.
 Si conocemos un área de la matemática muy bien,
 entonces disfrutamos de los cálculos.
 Y quien disfruta los cálculos avanza rápidamente.

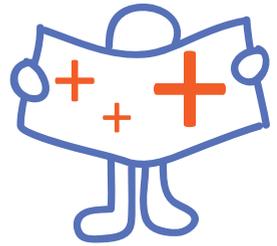


¿Cómo te sientes entonces con tus cálculos horribles?
 ¿Los has registrado todos?
 Y ¿has encontrado vecinos amigables?
 ¿Qué conoces más: vecinos amigables
 o cálculos horribles?
 Sabes, sobre todo,
 ¿Cuántos cálculos debes conocer?
 ¿Cálculos en los cuales debes saber el resultado sin demora?
 No son tantos.
 Aquí están.

Tabla de cálculos con suma y resta

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...					
0		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11						
3		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12						
4		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13						
5		5	6	7	8	9	10	11	12	13	14						
6		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15						
7		7	8	9	10	11	12	13	14	15	16						
8		8	9	10	11	12	13	14	15	16	17						
9		9	10	11	12	13	14	15	16	17	18						
...																	

Te das cuenta,
¿Cómo se ha hecho esta tabla?
Es una tabla de cálculos de suma.
Está construida de manera muy simple.
Sin embargo, encuentras todos los resultados
que debes conocer de memoria después del primer grado
de escuela.
Muchos de ellos los conoces desde hace mucho tiempo.
Por ejemplo $5 + 0 = 5$.
Para muchos no tienes que buscar mucho.
Por ejemplo para $7 + 1 = 8$.
¿Cuántos cálculos de suma difíciles existen?
¿Son 64? o ¿son 49?



Leyendo la tabla

Escribe algunas sumas,
que puedas encontrar en la tabla.
Anótalas en una hoja de papel sin el resultado.
Junta tu nombre allí.

Intercambia tu hoja con otro niño u otra niña.
¿Encuentras los resultados de sus sumas en la tabla?
Anota los resultados en la hoja y pégalos en tu diario de aprendizaje.
Explica cómo has leído los resultados en la tabla.

¿Tienes una idea de cómo podrías leer
el resultado del cálculo $13 + 15 = \square$?
Anota los números en la tabla.

En la tabla se encuentran solamente cálculos con el símbolo
de adición "+".
¿Podrías, entonces, leer también los resultados de
cálculos de disminución?

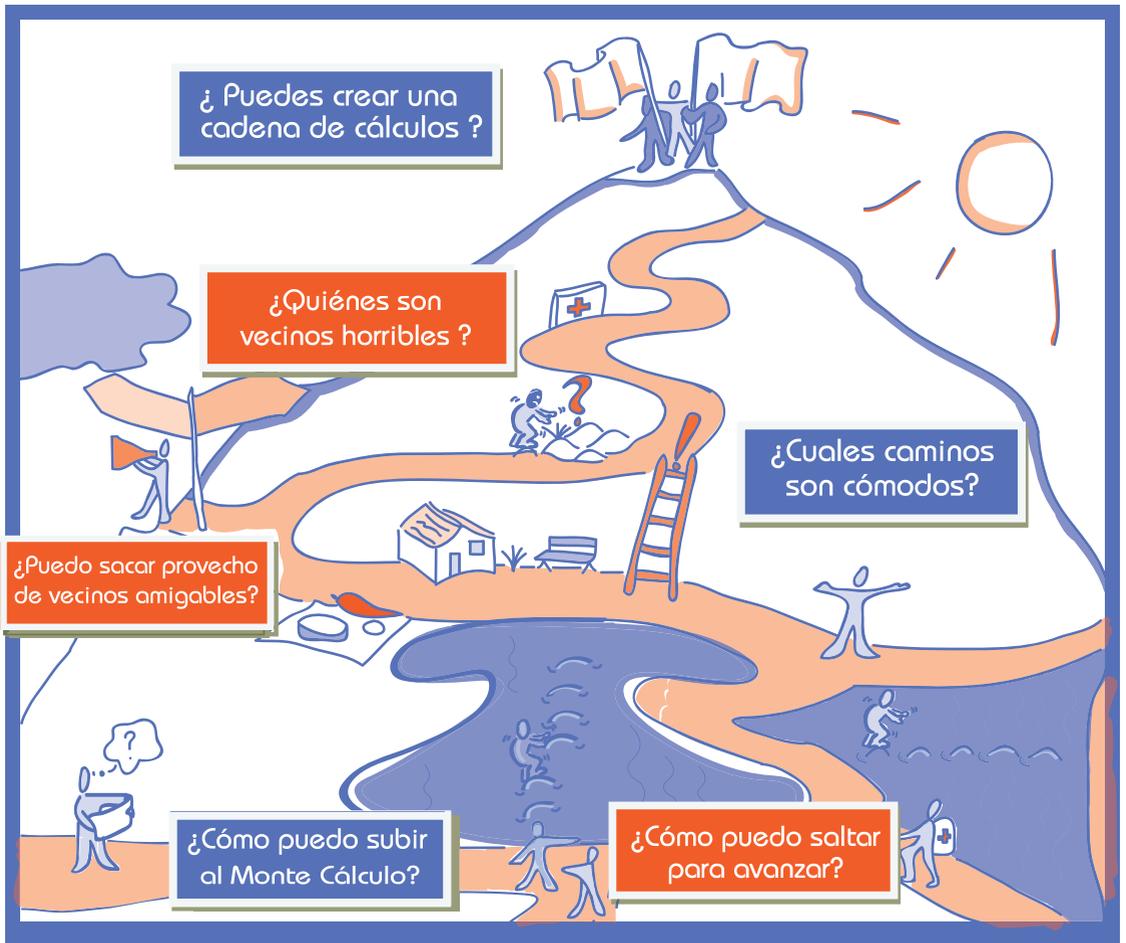
Las tablas son muy prácticas,
cuando sabemos cómo leerlas.
Se pueden usar en una forma... pero también en otra.
Algún día serás muy feliz con esta tabla,
cuando tus dedos no sean suficientes para contar números.
También puedes usar la tabla como un mapa.
Entonces miras desde muy arriba
hacia abajo, al paisaje de los cálculos.
Cada resultado habita en un terreno cuadrado.
Y cada resultado posee 8 vecinos:
Uno en cada lado (cuatro) y uno en cada esquina (cuatro).
En el mapa puedes marcar las ubicaciones
de los cálculos horribles y de los amigables.
Tal vez encuentres en esto los barrios importantes.

Residencias de los números

Busca en la tabla de sumas tus cálculos favoritos.
Marca estos cálculos con tu color favorito.
Busca entonces también los cálculos horribles
y márcalos con un color diferente.

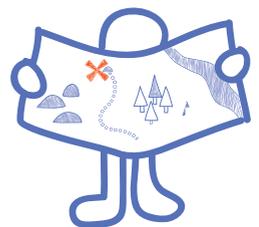
Selecciona uno de los cálculos horribles
y anota uno de los ocho vecinos en tu diario de aprendizaje.
¿Existen cálculos amigables entre los vecinos?
¿Ellos te ayudan en el cálculo horrible?
Describe cómo te ayudan.

¿Ya te has dado cuenta qué pasa
si cambias un poco el cálculo?
A veces el resultado del cálculo es el mismo, a veces cambia.
¿Cuánto es la diferencia entre los vecinos?
Y ¿cuál es la mayor diferencia entre ellos?



Esto te ayudará a ver qué tanto se diferencian:
Construye en cada terreno una torre con tantos tucos como muestra el número que habita allí.
Tal vez no tienes suficientes tucos para construir todas las torres.
Tal vez construyes las torres altas solamente en la cabeza.
Tal vez consideres incluso cuántos tucos hubieras necesitado.

En un mapa se pueden leer muchas cosas.
Por ejemplo, uno se da cuenta de qué tan altas son las montañas y lo inclinado que sube o baja.

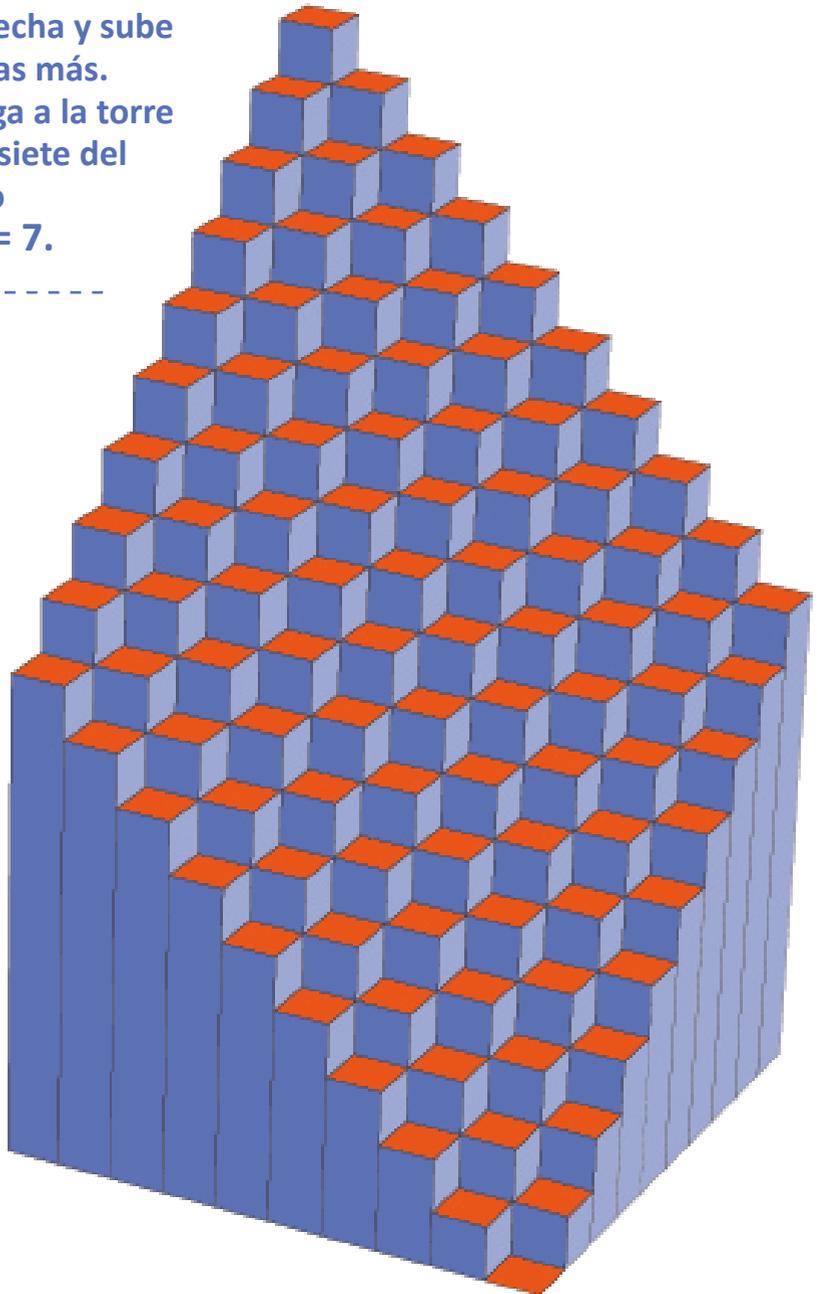


Sucede muy similar con nuestro mapa de sumas.
Nos imaginamos que en cada espacio se ha colocado una torre:
Con el número 18 se encuentra una torre alta con 18 tucos,
y con el número 3 solamente una torrecita con 3 tucos.



¿Te puedes imaginar, cómo se ve este paisaje?
¡Muchas escalas en todas las direcciones!
Existen también senderos de la misma altura,
los cuales se extienden sobre torres con la misma altura.
¿Te puedes imaginar, cómo subiría un enanito en este paisaje?
Ves cómo él, laboriosamente, escala de grada en grada,
cuando avanza en el cálculo $3 + 4 = \square$.
Él se coloca en el 0 y ve dos gradas cómodas
que aumentan de uno en uno, que se extienden en
dos direcciones hacia arriba.
Él selecciona las gradas de su izquierda y sube tres pasos
entonces da vuelta a
su derecha y sube
4 gradas más.
Así llega a la torre
de los siete del
cálculo
 $3 + 4 = 7$.

Así se ven las torres
en el paisaje de
adición, cuando se
construyen con tucos.
Puedes imaginar los
números de la tabla
de adición en las
gradas.



Por suerte el enanito no tiene que subir a cada torre siempre tan laboriosamente.

Se sabe que puede practicar magia.

¡Tanto como tú mismo!

El enanito se puede trasladar en un salto

con magia de 0 a 8, 20 o 100,

pero solamente, cuando encuentra un cálculo amigable, un cálculo, que conoce de memoria. Por ejemplo:

$$4 + 4 = \square \text{ o } 10 + 10 = \square \text{ o } 70 + 30 = \square.$$

Esta magia la conoces también.

Averígualo en tu tabla de suma,

donde marcabas los resultados de los cálculos amigables.

Marca estas áreas también en la imagen del paisaje de suma.

Ahora sabes dónde tus torres mágicas están colocadas.

A todos estos resultados que puedes brincar,

sin escalar laboriosamente las gradas

contando uno por uno los pasos.

Y con cada nuevo cálculo que sabes de memoria,

se le regala a tu enanito una nueva torre mágica.

Las torres mágicas te ayudan

a hacer los cálculos más fáciles y más seguros.

Cuando sabes el cálculo de $100 + 100 = 200$ de memoria, puedes llegar también más rápido a los vecinos.

$$97 + 98 = \square \text{ por ejemplo}$$

$$\text{se cambia en } 100 + 100 = \square.$$

y ya te colocas en tu torre mágica,

en las alturas.

Ahora tienes que bajar unas pocas gradas.

Dos gradas hacia un lado y tres al otro lado.

Vale la pena buscar estas torres mágicas.

Y cuando quieres estar seguro de que tu resultado es correcto, lo tienes que comprobar con otra torre mágica.

Por ejemplo con pequeños pasos en el sendero de altura:

$$97 + 98 = 96 + 99 = 95 + 100 = 195$$

Esto lo tienes que recordar muy bien:

Resuelve cada cálculo... por lo menos de dos maneras distintas.

Hazlo siempre así y también de otra manera.



Variar los cálculos

¿Ya has descubierto todas tus torres mágicas?
Mira bien los senderos de altura del paisaje de suma.
¿Existen entre las torres de nueve, también torres mágicas?
Anota todos los diez cálculos de adición,
con los cuales llegas al sendero de las torres de nueve.
¿Cuáles de ellos conoces de memoria?

Anota muchos cálculos de suma, que no conoces de memoria.
Cámbialos hasta que descubras una torre mágica en la misma altura.
Por ejemplo $56 + 18 = 55 + 19 = 54 + 20 = 74$
Explica cómo debes variar un cálculo de adición,
para que siempre quedes en el camino a la misma altura.

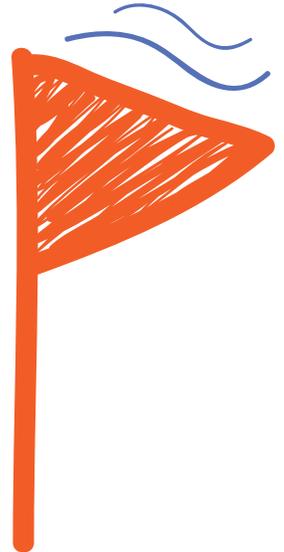
A veces llegas más rápido al objetivo,
cuando brincas a una torre mágica,
que sea un poco más alta o baja

Así es el caso de $97 + 98 = \square$.

Escribe estos cálculos.

Explica cómo puedes hallar el resultado.

¿Existe solamente un camino?



Busca algunos cálculos
que se encuentren muy cerca de tu torre mágica.
Da estos cálculos a otro niño u otra niña.
Deja que te explique cómo resuelve estos cálculos.
¿Usa las mismas torres mágicas como tú?

**Cuando cambias una y otra vez los cálculos
y cuando no te contentas
con un solo camino,
muy pronto te sientes
como en casa, en el paisaje de cálculos.
Entonces encuentras por todos lados torres mágicas,
y tu enanito raras veces tiene que subir gradas.
Se transforma poco a poco en una Blanca Nieves
que baila ágilmente sobre las torres mágicas
y salta a cualquiera de ellas.**

Ahora sabes lo que puedes hacer,
para completar tus cálculos más fácilmente:
tienes que aplicar magia y contar poco,
brincar lejos y subir pocas gradas.
Naturalmente tienes que practicar un poco.
Pero no olvides:
¡Hacer cálculos es parecido al baile!
Y no aprendes a bailar,
cuando repites cientos de pasos,
siempre en la misma forma.
Mejor resuelve el mismo cálculo en muchas formas,
en lugar de muchos cálculos en una sola forma.

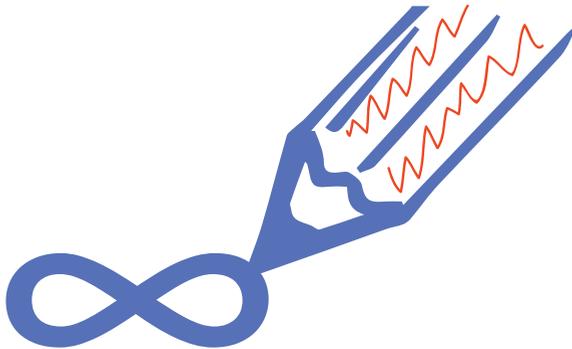
Blanca Nieves ocupa mucho espacio cuando baila.
Y también para ti,
el paisaje de suma se irá haciendo cada vez más estrecho.
Puedes seguir construyéndolo más allá.
En tus pensamientos lo puedes seguir construyendo,
tanto como tú quieras.
¡Infinitamente lejos!
En todas las direcciones.
Como avances hacia adelante con las gradas,
ya lo sabes: se hacen más y más altas.
Además, se podrían construir hacia atrás,
solamente tendrás que cavar hacia abajo.





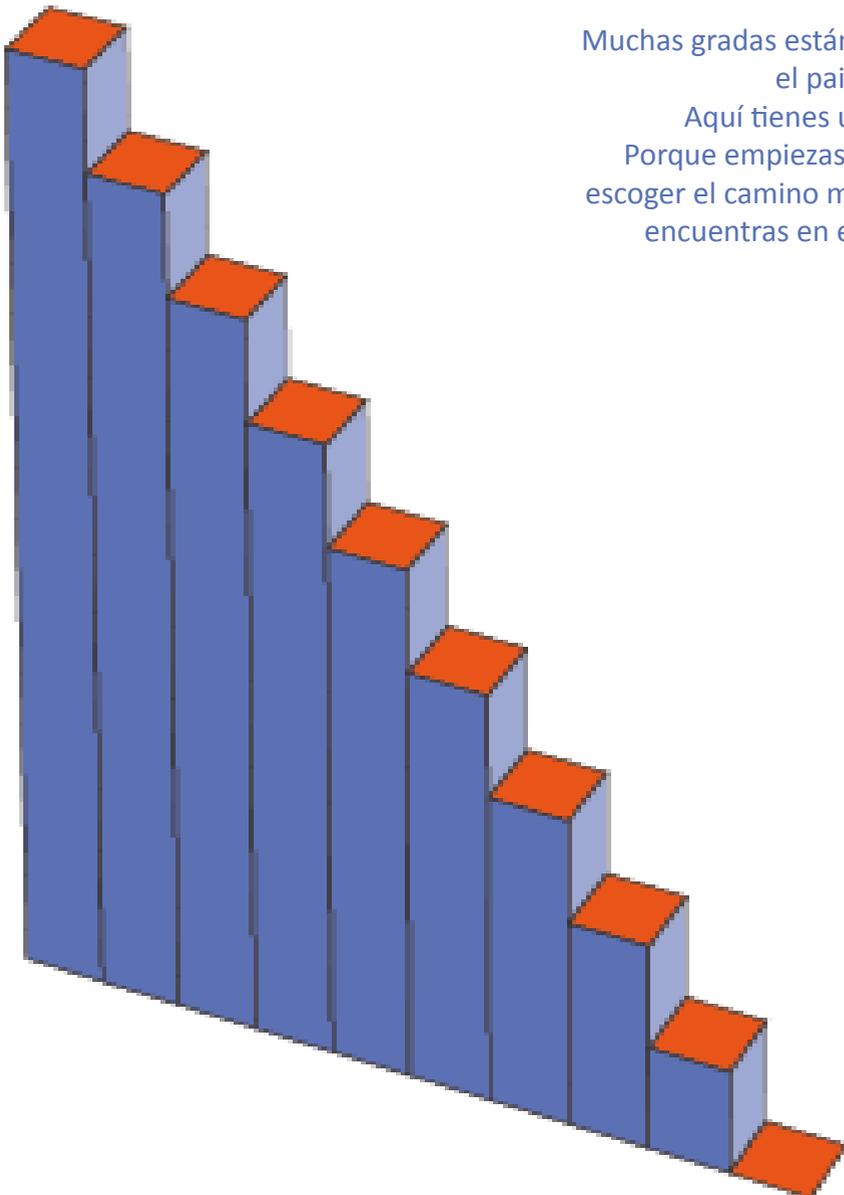
Es bonito cuando sabes exactamente,
la forma en que algo procede.
En el país de las matemáticas,
es motivo de alegría especialmente
que algo proceda de una u otra determinada forma,
hasta el infinito.

Entonces uno dice “etcétera”
o simplemente escribe tres puntos, así: “...”
La palabra **infinito** tiene su propio símbolo.
Se ve como un ocho acostado.



Cuando escribes un ocho, puedes seguirlo delineando
infinitamente con tu lápiz en las curvas.
Y cuando tú subes, el paisaje se llena de torres aún más altas,
y puedes permanecer siempre en el mismo camino.
Puedes empezar en el 5,
subir a un 6 en la vecindad,
y seguir recto siempre uno más,
del 6 al 7 al 8 al 9 etcétera.
En el camino más inclinado en el paisaje de torres,
puedes subir con pasos dos números.
entonces llegas por ejemplo del 5 al 7, al 9, al 11 ...
Podrías incluso tan solo brincar gradas,
entonces llegas por ejemplo de 5 a 8 a 11 a 14.
Así existen muchos caminos que podrías tomar.

Encuentras una secuencia especial de números,
cuando empiezas con el número 0 y subes desde allí
sobre caminos rectos de torre en torre.
Has solamente brincos cortos,
puedes, por ejemplo, brincar de 0 a 2, a 4, a 6...
Este es el camino más inclinado
que puedes tomar en este paisaje de torres.
Aquí se encuentran todos los números pares,
por lo tanto este camino se llama la secuencia de los doses.
Cuando consideras solamente las primeras diez torres,
que están colocadas en fila,
lo puedes llamar la fila de los doses.



Muchas gradas están escondidas en
el paisaje de adición.
Aquí tienes una en especial.
Porque empiezas con el cero y al
escoger el camino más inclinado, te
encuentras en el camino de los
números pares.

Con el tiempo esto se vuelve aburrido,
siempre brincar solamente dos números.
Quien ya brinca con seguridad en la fila dos,
hacia arriba y hacia abajo,
podrá aventurar un salto más largo.
¿Cómo será con un salto de cero a tres?
Tienes cuatro oportunidades.

Cuando has tomado una decisión,
sigue tu viaje en esta misma recta sobre seis,
nueve y más allá.
Así entonces, conoces la secuencia de tres:
0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, ...
Quien incluso logra el salto de cero a cinco,
y sigue saltando las mismas distancias en la misma dirección.
¿Conoce la secuencia de los cinco? Escríbela.

Necesitas un poco de coraje,
al hacer saltos en el paisaje de las torres.
Pero vale la pena.
Por ejemplo, cuando saltas a la secuencia de siete,
descubres viejos conocidos del número siete,
que no viven en la cercanía del número siete.
Los números 49 y 56 por ejemplo son buenos conocidos,
porque pertenecen a la secuencia de siete.



Un par de secuencias son muy importantes.
Ya conoces la secuencias de uno,
desde que puedes contar.
La secuencia de dos,
son los números pares.
La secuencia de tres,
es tal vez ya conocida
por la gran aguja del reloj,
que indica en 3, 6 y 9 los cuartos de hora.
La secuencia de cuatro,
la logras muy fácil.
La secuencia de cinco,
es muy amigable.
Con la secuencia de seis,
te ayuda la fila de tres.
La secuencia de siete es,
para muchos, voluminosa.
Con la secuencia de ocho,
te ayuda la secuencia de cuatro y de dos.
La secuencia de nueve,
renquea muy bonito detrás de la
secuencia de diez.
Para contar, a menudo necesitas secuencias aún más altas.
La secuencia de veinte, te lleva muy rápido al cien.
Con la secuencia de 100, llegas rápido a mil.

¿Cuáles de estas secuencias las conoces tan bien,
que rápidamente podrás contar unos buenos conocidos?
¿Sabes cuáles son conocidos del 7?
¿Solamente los reconoces en la fila,
o los recuerdas sin orden?
La siguiente tabla te ayuda
a conocer importantes secuencias de números.
Ella te muestra las cuatro direcciones,
en las cuales se encuentran las secuencias de tres.
Desde el cero inician también todas las demás secuencias.
¿Ya puedes ver algunas?



	0	1	2	3	4	5	6	7		9		12		15			18		
1	2	3	4	5	6	7													
2	3	4	5	6	7														
3	4	5	6	7		9													
4	5	6	7					12											
5	6	7							15										
6	7		9							18									
7		9									21								
				12								24							
	9																27		
					15														30
	12						18												

Saltos más largos

¿Qué tan grandes son los saltos que ya te atreves a hacer? Saltas ya en la secuencia del cuatro o ya en la secuencia del 6? Anota tu secuencia de números en la tabla de suma extendida. Primero marca con color los campos, y entonces escribe allí los números



¿Cuántas veces aparece tu secuencia de números en la tabla? Anota en lo posible todos los caminos rectos de tu secuencia.

Ahora crea tu propia tabla de suma. Necesitas papel cuadriculado con casillas grandes. Selecciona una secuencia complicada, y anota los caminos rectos de esta secuencia en tu tabla.

Cierra los ojos
y trata de recordar la mayor cantidad de números
de tu secuencia complicada de números.
Anota estos buenos conocidos a lo largo y ancho
en una hoja de tu diario de aprendizaje.
¿Se ha creado una bonita imagen?

Ahora conoces mejor las secuencias de números.

**Ya puedes hacer saltos cortos y largos
bastante rápidos y seguros.**

**Has contado de vez en cuando los saltos
¿Qué hiciste desde el cero?**

**O ¿has contado a una persona
de tus saltos en el paisaje de torres?**

Por ejemplo:

**Yo he hecho desde el cero 8 saltos en la secuencia de cinco
y aterrizaba en la torre 40.**

0 con 7 saltos con la secuencia de 12 he llegado a la torre 84.

Estos pequeños cuentos se anotan en matemática, como:

$$8 \times 5 = 40$$

$$7 \times 12 = 84$$

¿Ya has mirado estos cálculos?

Entonces es tiempo para la tabla de multiplicaciones.

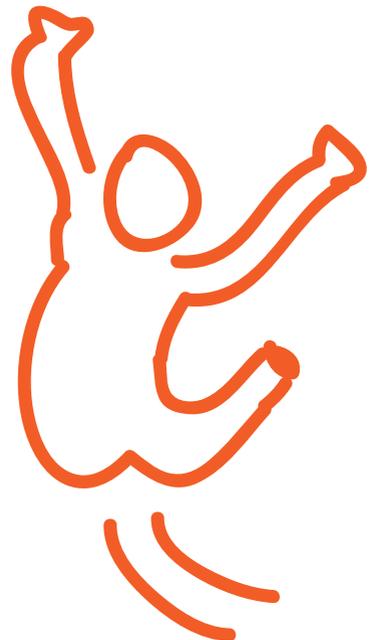


Tabla para cálculos con multiplicación y división

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...					
0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0						
1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
2		0	2	4	6	8	10	12	14	16	18						
3		0	3	6	9	12	15	18	21	24	27						
4		0	4	8	12	16	20	24	28	32	36						
5		0	5	10	15	20	25	30	35	40	45						
6		0	6	12	18	24	30	36	42	48	54						
7		0	7	14	21	28	35	42	49	56	63						
8		0	8	16	24	32	40	48	56	64	72						
9		0	9	18	27	36	45	54	63	72	81						
...																	

La tabla de multiplicación está hecha como la tabla de adición. Sin embargo en la esquina izquierda de arriba se anotó un signo de multiplicación, y los números crecen rápidamente.

En esta tabla encuentras casi todos los cálculos de multiplicación, que debes conocer de memoria después del segundo grado. Todo que has hecho con la tabla de adición, puedes probarlo también con la tabla de multiplicación. Solamente tienes que variar los cálculos un poco.

Leer en la tabla de multiplicación

Mira entonces la página 14.

Con los primeros dos encargos para leer tablas, puedes trabajar también en la tabla de multiplicación.

Cambia el tercer y cuarto encargo de tal manera, que se acomoden bien para la tabla de multiplicación. La adición será multiplicación y el menos será división.

Igual se puede imaginar la tabla de multiplicación como un paisaje de torres.

Sin embargo será un poco más difícil de construir con tucos. Los 900 tucos que se requieren para el paisaje de adición no alcanzarían.

Las torres pequeñas ya no son tan frecuentes como en el paisaje de adición:

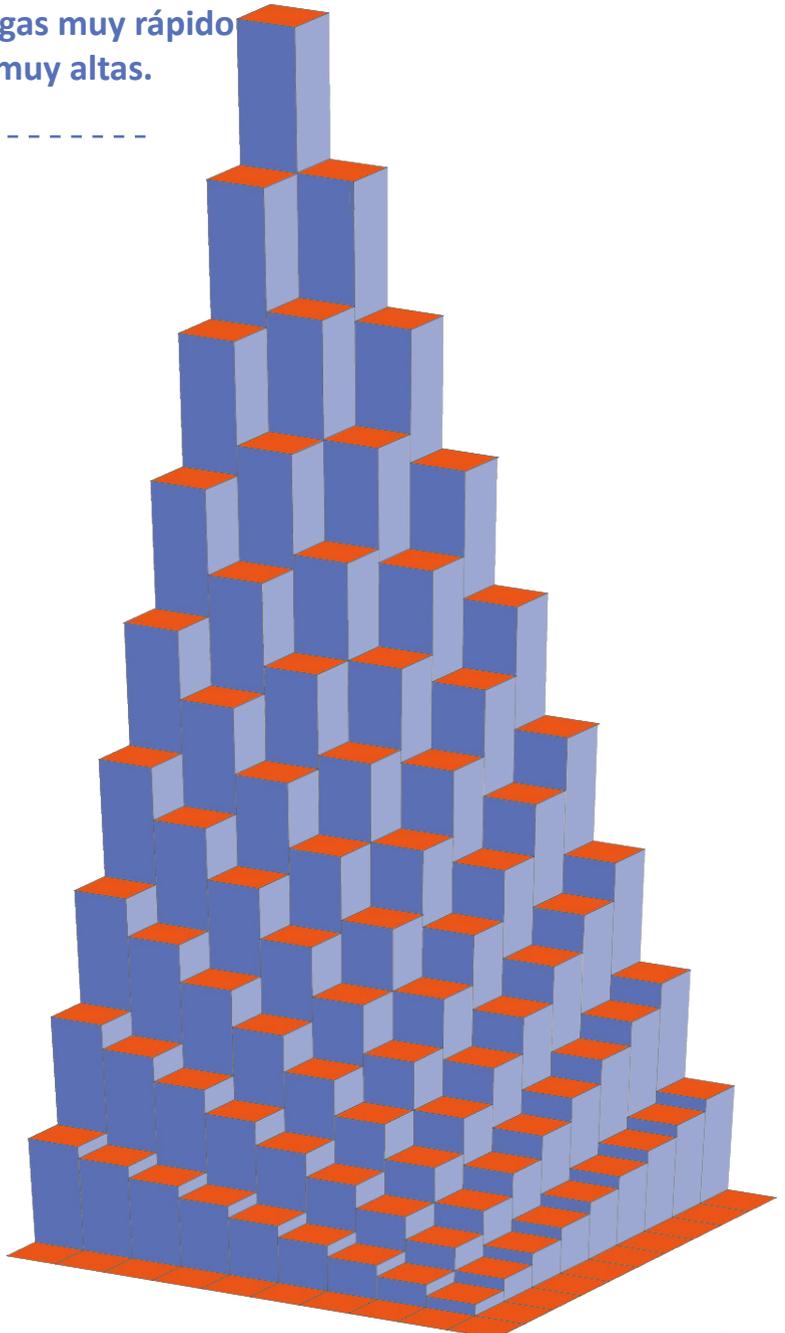
La torre de uno solamente una vez,

la torre de 2, 3 y 5 solamente dos veces,

la torre de 4 tres veces, y la torre de 6 cuatro veces.

Sin embargo, llegas muy rápido hacia las torres muy altas.

Aquí ves una sección del paisaje de multiplicación. En la torre más alta puedes anotar el número 81. ¿Qué números tienen las torres más bajas? (aún no es permitido anotarlos). En este paisaje de multiplicación existen algunas rutas de gradas bastante regulares: La secuencia de uno, la secuencia de dos, la secuencia de tres. Aunque también existen vías torcidas.



Ahora examina bien

Las torres que están juntas.

¿Algunas te resultan conocidas?

0, 3, 6, 9, 12.... o 0, 7, 14, 21, 28....

Exactamente, sobre estas torres ya saltaste una vez,
sin embargo esto fue en el paisaje de adición.

Entonces habían saltos largos:

Como los saltos dentro de las secuencias de cinco, siete o nueve.

Las torres que están en una misma secuencia
en el paisaje de multiplicación,

ya son bien conocidas desde el paisaje de adición.

Ahora están ubicadas una al lado de la otra.

Es como en una fiesta:

Las bien conocidas vienen desde lejos

y ahora se juntan, una torre al lado de la otra.

Las bien conocidas del paisaje de adición,

son ahora también vecinas en el paisaje de multiplicación.

Por qué el paisaje de multiplicación parece a una montaña .

Lo nombramos monte cálculo

Ya ahora te ubicas un poco
en el paisaje de multiplicación.

Quien trepa un poco en este Monte Cálculo
tiene que cuidarse de las gradas altas.

El salto de una grada a la otra
puede resultar peligrosísimo.

En algunos de los caminos rectos que puedes tomar,
subes gradas con igual distancia entre ellas:

0, 2, 4, 6, 8, 10.... o 0, 9, 18, 27, 36, 45,...

Estos caminos ya los conoces;

Son las secuencias de uno, dos, tres,....

Existen también caminos rectos en el fondo de las tablas,
en los cuales se incrementa la distancia entre grada y grada.

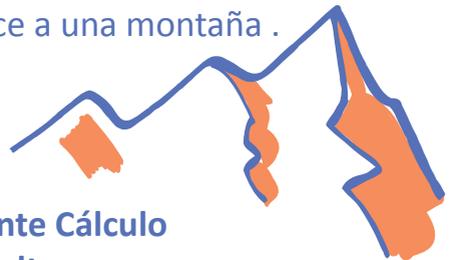
Aquí empiezas a sudar bastante
y el camino se pone más empinado.

La escalera con los números cuadrados 0, 1, 4, 9, 16, 25,...

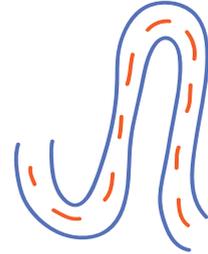
Son los que te llevan más rápido a la cima.

Es una forma de caminata en la cresta de la montaña.

En ambos lados del camino las torres son menos altas.



En las gradas del **0, 2, 8, 18, 32**,
subes en los flancos de la montaña.
No te puedes parar a descansar en el paisaje de la multiplicación.
Ya no existen caminatas en la altura,
en las cuales se avanza de torre a torre con igual altura.
Por ello existe ahora una caminata
sobre el lomo de la montaña,
en la cual empiezas subiendo y al continuar, bajas de nuevo:
0, 7, 12, 15, 16, 15, 12, 7, 0.



Vías torcidas

Anota tres caminatas con tres colores
en la tabla de multiplicación:

Una caminata sobre el flanco de la montaña, una por la vertiente,
y una caminata atravesando el lomo de la montaña.

Puedes tomar los números hacia arriba o crear tus propios caminos.

Sin embargo no olvides:

El camino debe aparecer recto en el fondo de la tabla.

Colorea el camino **32, 35, 36, 35, 32** en la tabla de multiplicaciones.

¿Puedes extender este camino, así: ..., **32, 35, 36, 35, 32**, ...?

¿Extiende todos caminos coloreados hasta donde sea posible?

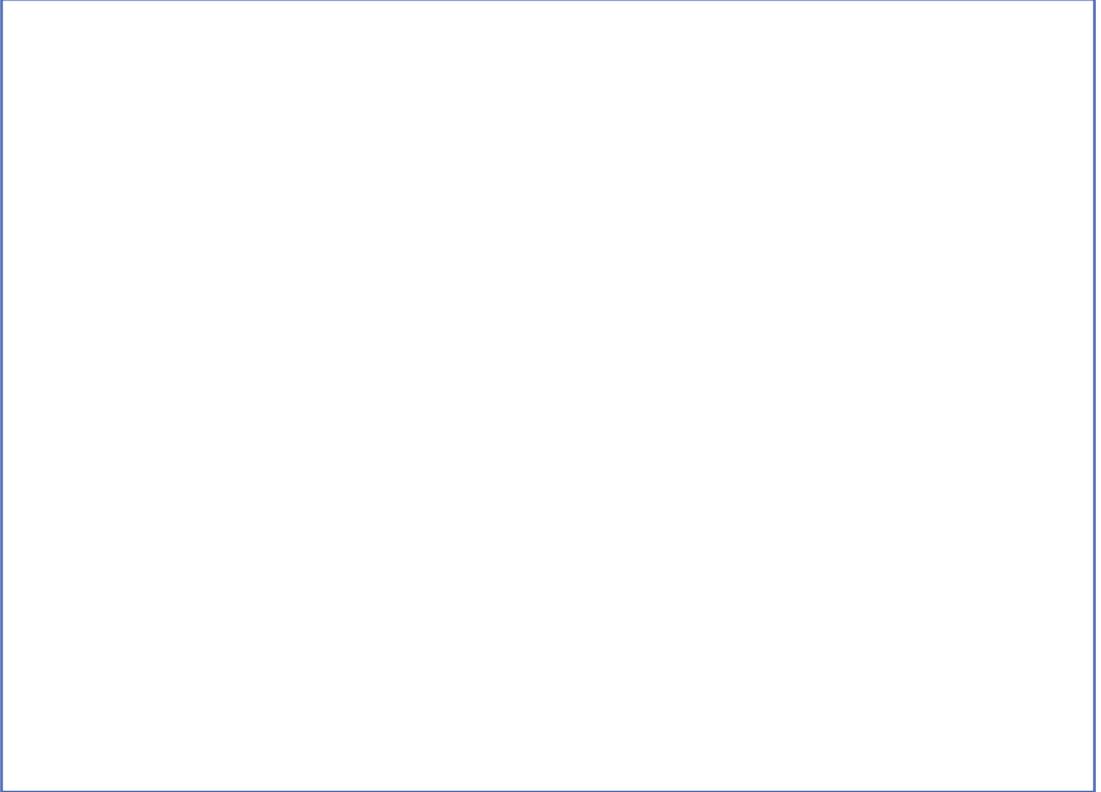
¿Cómo cambian las diferencias en la altura de las gradas?

Extiende todos los caminos coloreados cuando sea posible.

Anota todas las multiplicaciones de los caminos uno debajo del otro.

Compara los cálculos. ¿Descubres una regla?

Por favor, piensa en un cálculo de multiplicación horrible y cómo recibes ayuda de un vecino amigable, cuando tienes cálculos horribles.



**En las torres altas
se esconden a veces cálculos muy simples.
Como lo son $7 \times 10 = 70$, $4 \times 25 = 100$
o hasta $10 \times 100 = 1000$?
¿Acaso ya conoces estos cálculos de memoria?
Entonces ya tienes torres mágicas en el paisaje de las torres.
También en el paisaje de multiplicación vas aprender a bailar.
También aquí es importante
aprender a usar las torres mágicas,
y que examines siempre dos o tres caminos.
Así descubres tus cálculos favoritos
y también aprendes a dominar candidatos horribles.**

Buenos conocidos

Encuentra en la tabla de multiplicación tus cálculos favoritos.
Anótalos en tu diario de aprendizaje y explica porqué te agradan.
¿Ya los sabes de memoria? ¿Son estas torres mágicas?

¿Cuántos cálculos horribles
puedes ganar con tus cálculos favoritos
y con tus torres mágicas?
Anota cómo funciona

¿Tu truco para domar cálculos horribles ayuda a otro u
otra estudiante?
Intercambia tu diario de aprendizaje con él o ella
y prueba también sus trucos.

La amabilidad es contagiosa.
Esto lo conoces de cuando alguien ríe.
Alguien tiene una risita secreta,
y de repente se produce una carcajada entre todos y todas.
Es parecido con los cálculos amigables.
Ellos contagian a sus vecinos horribles,
y de repente ellos se vuelven amigables.
Detrás de los cálculos horribles
se esconden frecuentemente historias interesantes.
Cuando Lorena piensa en el cálculo horrible $7 \times 8 = \square$,
inmediatamente recuerda el pequeño desvío,
que la ayudaba a encontrar la solución.
 $7 \times 8 = (8 \times 8) - 4 - 4.$
¿A ti te pasa lo mismo?
¿Recuerdas cálculos horribles?
¿Los que cambiaste como querías y los domaste?
¿Te gustan ahora más?
¿Ya anotaste la historia
en tu diario de aprendizaje?
Con tales recuerdos te alegrarás más adelante.

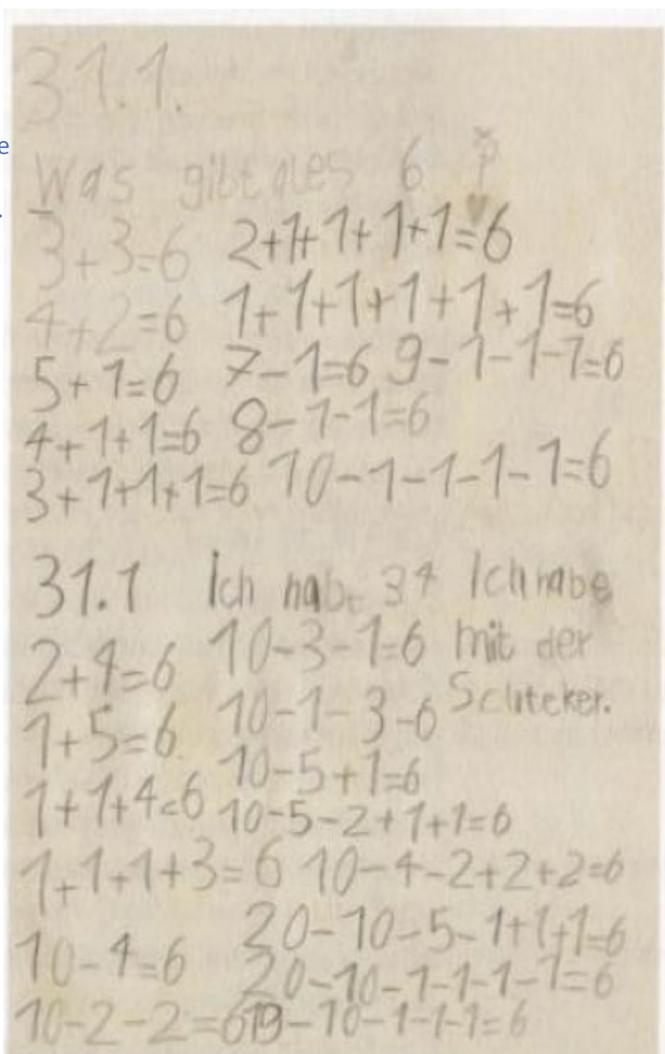




Cuanto mayor es el número de caminos
y desvíos que se te ocurren,
más amigables te serán los números.
En cada número se esconden cálculos.
A veces son muchos cálculos,
a veces son pocos.
¿Qué se te ocurre cuando escuchas quince?
Quince es el resultado de muchos cálculos.
Quien conoce bien el quince, ciertamente piensa en
 $15 = 7 + 8$ o en $15 = 3 \times 5$

Ahora jugamos en el paisaje de adición con 6.
¿Quieres saber,
cuantos cálculos tienen el resultado 6?
¿Puedes encontrar muchos?

Erica ha encontrado 26 cálculos que siempre tienen el resultado 6.



**¿También existen resultados,
que conoces tan bien como Erica?**

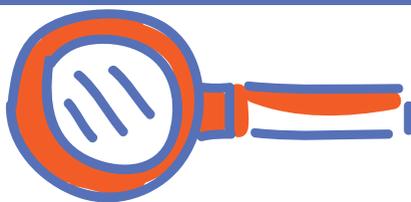
**100 resultados encuentras en nuestra tabla de adición, y
100 resultados en la tabla de multiplicación.**

¿Para cuáles resultados se te ocurren varios cálculos?

Empieza con los números pequeños.

**Con los pequeños números,
se pueden amaestrar grandes cálculos.**

Alrededor de los resultados



¿Conoces un número,
que es el resultado de muchos distintos cálculos de multiplicación?
Anota los cálculos que se te ocurran en tu diario de aprendizaje.

Busca en la tabla de multiplicación resultados, que aparezcan
muchas veces.
Anota todos los cálculos para el mismo resultado uno abajo del otro.
Tú puedes extender la tabla de los cálculos.

Toma el resultado,
del que has encontrado el mayor número de cálculos.
Para este resultado ¿existen todavía mucho más cálculos!
Hazlo como Erica con el seis.
Inventa para tu resultado
un par de cálculos extendidos con multiplicación y división.

**Para cada resultado existe un sin fin de cálculos.
De unos cálculos simples
se puede construir una cadena muy extendida:
 $3 \times 4 = 12$, $12 \times 5 = 60$, $60 \times 2 = 120$.
Con cada multiplicación subes
a un nuevo resultado intermedio.
Si el resultado intermedio te resulta demasiado alto,
puedes disminuirlo con cálculos de división.
Por ejemplo, si quieres descender de 120 al 5,
debes dividir 120 por 24.
Puedes descender también al 6 o al 8.
Al 7 no llegas directamente;
ahí debes tomar un desvío.**

Cálculos en cadena

**puedes calcular y anotar
paso por paso.**

**Lo mejor es poner una coma
donde termina un cálculo
e inicia el siguiente cálculo,
como se muestra en la página anterior.
Esto se hace así con todos los cálculos,
pues de lo contrario, el signo igual sería incorrecto.**

Puedes escribir el símbolo “=”

si lo que está colocado a ambos lados es equivalente.

Tal vez puedes averiguar en tus viejos diarios de aprendizaje:

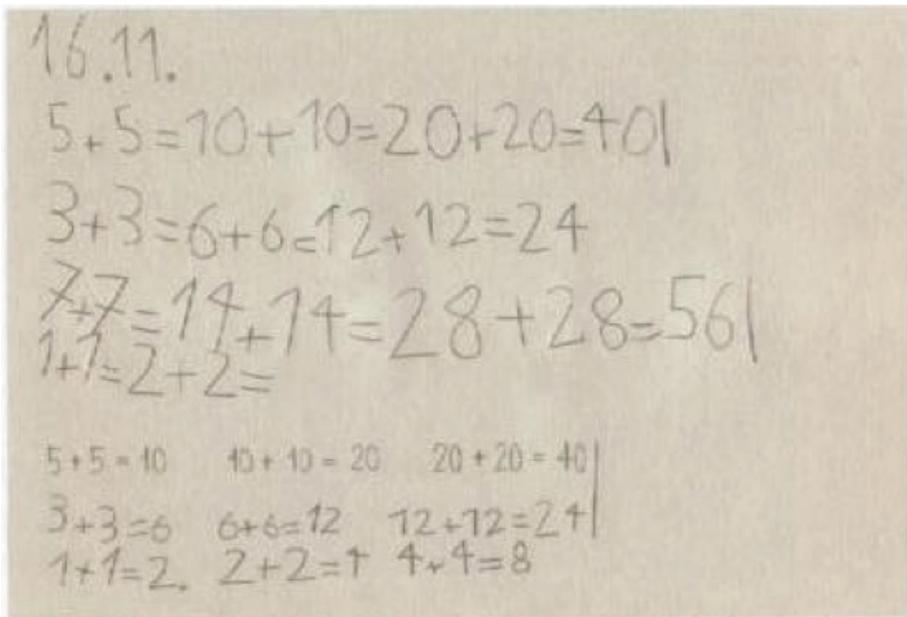
¿Has puesto este símbolo siempre correctamente?

¿También con los cálculos de adición?

Como puedes ver en la imagen,

Valeria lo hizo incorrecto en el primer grado.

$5 + 5 = 40$ Valeria sabe que esto es falso, sin embargo se puede leer esto en este diario de aprendizaje. También con cálculos en cadena siempre necesitamos que al lado izquierdo y derecho del símbolo “igual” aparezca lo mismo. Por lo tanto tenemos que empezar un nuevo cálculo por cada paso intermediario. La profesora le muestra a Valeria.



Quien quiere descubrir el país de las matemáticas,
no lo puede hacer en apuros.

Sin embargo, a menudo es importante,
tener el resultado de un cálculo,
de inmediato y a la mano.

¿Ya has considerado cómo te funciona
de manera más rápida y más cómoda?

Y ¿ya has investigado,
cómo lo hacen los demás?

Puedes probar una vez,
cómo te funciona más rápido:

Contando con los dedos,
buscando en la tabla o
calculando en tu cabeza.

Calcular contra el tiempo

Anota veinte cálculos simples con los resultados,
uno bajo el otro en una tira de papel.
Todos los cálculos de las tablas son permitidos.



Lee tus cálculos para otro niño u otra niña
Puede calcular con los dedos, revisar la tabla o sacar
el resultado en la cabeza.

Mira el reloj y cuenta cuánto tiempo toma
para encontrar los veinte resultados.

Prueba la tira también con otros niños y otras niñas.
Encuentras uno que calcula con los dedos,
Otro u otra que revisa la tabla, y uno que trabaja
solamente con la cabeza
¿Cuál es el más rápido?

¿Quién calcula más rápido en tu clase?
¿Cómo lo hacen los más rápidos o las más rápidas?
¿Crees que es también válido comprobar el resultado usando dos caminos diferentes, cuanto tienes presión de tiempo?

Tal vez en este caso, los más rápidos ya no son quienes calculan todo en su cabeza. Sin embargo, ellos y ellas tienen una gran ventaja: Quien calcula con la cabeza puede usar sus torres mágicas. La magia es siempre la forma más rápida para calcular. Más rápido que buscar ayuda con los dedos, las tablas o hasta con las calculadoras.



Quien calcula muy rápido, aunque no corriendo como loco, puede variar los cálculos un poco, y descubrir a menudo una torre mágica, que le facilita el trabajo. No te dejes desviar de esto, de acomodar los cálculos siempre de la mejor manera para ti, aún cuando tengas prisa. Cuando acomodas y varias, encuentras siempre nuevas torres mágicas.

A menudo es suficiente

cuando solo tienes una vista general del cálculo,
cuando sabes aproximadamente el resultado.

Lograr esta vista general es un arte,
que es casi tan importante como el cálculo mismo.

Este arte se llama estimar.

Quien quiere estimar bien, tiene que practicar la buena magia.

Cualquier cálculo lo puedes cambiar de tal forma,
que puedas estimar el resultado fácilmente.

Te transfieres simplemente a una torre,
que sea un poco más alta o baja,
y ya sabes en donde habita el resultado.

Qué tal si tienes el encargo de simplemente contar
cosas que están en la mesa, como por ejemplo:

¿Cuántas manzanas están en una mesa?

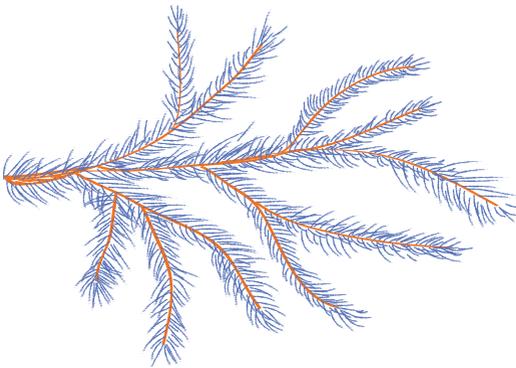
¿Cuántas uvas están en un racimo de uvas?

¿Cuántas espinas tiene un pescado?

¿Cuántas hojas tiene una alustre?

¿Cuántas agujas tiene una rama de pino?

¿Cuántas ramas tiene un árbol?



Ya te das cuenta que con las hojas o agujas no es tan fácil.
¿Cómo puedes estimar la cantidad, sin contarlos todos?
Anota en el diario de aprendizaje cuáles torres puedes usar
para estimar bien la cantidad,
con solo un poco de error.

Manzanas y uvas no tendrás que contar todos los días.
Sin embargo, cada día encontrarás muchas ocasiones para
estimar, dentro y fuera de la escuela.
¿Puedes pensar en situaciones con dinero, caminos, animales,
deportes y otros?
Puedes escribir estos encargos y
explicar en el diario de aprendizaje paso a paso cómo lo has
estimado.



Números grandes

Busca en tu área, artículos de las cuales existen muchos,
estima cuantos son.
Explica en tu diario de aprendizaje que procedimiento usaste.

Inventa cálculos con números grandes e incómodos.
Estima el resultado con torres mágicas.
Comparte tus cálculos también con otros niños y niñas.
Ellos proceden igual que tú?

Has una búsqueda de personas,
tengan que estimar frecuentemente.
Cuenta los cuentos de cálculos de ellos.



Has encontrado muchas personas,
que te podrían contar sus historias sobre estimaciones?
Desde que todos tienen calculadoras y celulares,
se ha perdido un poco el arte de estimar.
Es una lástima.
Pues también deberías estimar
aunque uses la calculadora.
Si no lo haces, te confías como “ciego” en la calculadora
y te equivocas fácilmente por cantidades mil veces más grandes o
pequeñas.

Las calculadoras son asistentes preciosas.
Te puedes mover en el reino de los números sin límites
y tanto que quieres.
No se molestan, ellos corren para ti,
a las torres más altas y más incómodas.
y nunca dan un paso equivocado.
Uno podría sentirse celoso.
Pero las calculadoras son también tontas.
Solo pueden hacerlo de una manera y nunca diferente.
Ellas no saben,
qué es relevante y qué no lo es,
y no tienen torres mágicas y no pueden lograr una vista general.
Por lo tanto tienes que mantenerlas siempre bajo control.

Solamente tú sabes,
hacia dónde es el viaje
y lo que importa.

Diario de aprendizaje

Con el fin de que el trabajo del Aprendizaje Dialógico se refleje por escrito en una forma ordenada, es necesario elaborar un compendio de las hojas y los apuntes utilizados en la clase, así como de todos los textos redactados independientemente.

Este es el propósito del diario de aprendizaje, que puede ser un cuaderno corriente o bien constar de hojas sueltas que se recopilan en una carpeta. Es de gran importancia anotar de forma consecutiva las fechas en que se trabajan las respectivas páginas. En el caso de las hojas sueltas, es imprescindible apuntar también el correspondiente nombre del y de la aprendiz y el número de la página.

En el diario de aprendizaje se recopila todo lo que tenga carácter de papel:

Encargos, trabajos, realimentaciones, colecciones de autógrafos, ejercicios, preparaciones de exámenes, apuntes teóricos, comentarios de docentes, copias diversas entregadas, exámenes y los correspondientes análisis de errores, reflexiones, observaciones retrospectivas, etc. El único criterio de organización válido en el diario de aprendizaje es la fecha. La experiencia ha demostrado que los y las estudiantes se orientan asombrosamente bien en los diarios que ellos mismos llevan individualmente. No es necesario, por lo tanto, tener objeciones si los diferentes temas dejan su huella en una sucesión cronológica en el diario de aprendizaje. Para la preparación de exámenes o también para la autocrítica es conveniente redactar al final un índice.

Organización del Diario de Aprendizaje

¿Cómo se valoran las contribuciones?

Fecha:
¿Cuándo hizo el registro?
(Tiempo como principio de orden)

✓ Sí lo puedo comprender racionalmente.

Tema, idea germinal:
¿Con qué tratamos?
(Título corto/capta atención)

✗ No, no lo puedo comprender racionalmente. Entrega el encargo otra vez.

Encargo:
¿Qué tengo que hacer?
(Problema, expectativas, apoyo, objetivos)

✓ ✓ Papel de sujeto (el o la aprendiz se identifica con el tema).

Orientación:
¿Por qué lo hacemos?
(Motivos, cuestionamiento, revisión)

✓ ✓ ✓ Se reconoce un concepto; el o la aprendiz avanza en el contenido más allá de lo esperado; extraordinario!

Huellas:
¿Cuál camino escojo para la solución?
(Mi forma personal de abordar el tema)

A la oferta de la persona instructora, sigue la multitud de (diferentes) contribuciones de los y las aprendices.

Revisión:
¿A qué punto he llegado?
(Resumen, frase recordatoria, comentarios personales, preguntas abiertas, nuevo encargo)



Diario de aprendizaje

Nombre: _____

Fecha de inicio: _____

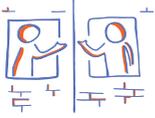
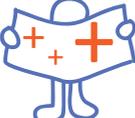
Cierre: _____

Así se puede, aunque funciona también de otra manera

- Usa este espacio o mejor crea tu propio diario de aprendizaje.



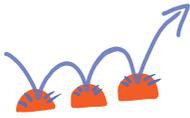
Compendio para adultos - Vista general de los encargos:

Página	Así se puede, aunque funciona de otra manera
4 Fotos antiguas	El tiempo es criterio de ordenamiento riguroso, pero también muy seguro.
	
5 Comparar textos	El conocimiento en la lengua materna desde siempre está bien desarrollado, solo falta la conciencia.
	
9 Secuencias cómodas	En la habilidad de crear conciencia sobre secuencias automatizadas y de poder cambiarlas, reside no solamente el potencial para la eficiencia, sino también para la innovación.
	
11 Transición de décimo	Lo que después se muestra como una vía fácil a la solución óptima, a menudo lo experimenta un principiante como un camino con piedras. El apoyo en momentos inadecuados es contraproducente. Y además: en el lenguaje hablado, la transición crítica no es con diez, sino con 16.
	
12 Vecindad	En un barrio de cálculos uno se puede mover de manera rápida y segura, aunque no nos gusten todos los habitantes. Este conocimiento del lugar es la base para las estimaciones.
	
14 Leyendo la tabla	La vía de un resultado hacia el cálculo, es frecuentemente más emocionante y estimulante, que la vía contraria. Cualquier resultado es una oportunidad para muchos cálculos. El abanico se abre hacia el infinito, cuando se amplía la tabla en todas las direcciones.
	
15 Residencias de los números	Uno llega a conocer un lugar solo investigando todo el paisaje a su propio ritmo, de arriba hacia abajo. Crear una red de puntos de orientación personal, es tan necesario como desarrollar el sentido de cambios con pequeños ajustes.
	
19 Variar los cálculos	Memorizar los conocimientos no es el objetivo, sino solamente un efecto secundario deseado, que se da al tratar profundamente los temas. Si se resuelve un cálculo de diez maneras, se extiende el horizonte; si realiza 10 cálculos de una manera, no se crean puntos de referencia para la memoria.
	

Página

Así se puede, aunque funciona de otra manera

23 Saltos más largos



En la transición de la adición a la multiplicación debe incluirse la vista; de lo contrario pasa desapercibida la estrecha relación entre aritmética y geometría. Las secuencias de números de la multiplicación son líneas rectas en el paisaje de adición.

27 Leer en la tabla de multiplicación



Contando solamente números uno llega a la adición, continuando adiciones uno llega a la multiplicación. Sin embargo, adición y multiplicación son territorios.

30 Vías torcidas



El paisaje de multiplicación está compuesto de escaleras rectas.

El grado de inclinación y las curvas del camino se perciben cuando cambiamos los dos factores de un resultado, siguiendo ciertas reglas. ¡Esto da una pequeña mirada hacia los lejanos dominios de la matemática!

31 Buenos conocidos



¿Dónde estoy ahora? ¿Quién tiene la mejor idea? ¿Qué tengo que conocer finalmente? La retrospectión y la vista hacia adelante a menudo crean claridad.

35 Alrededor de los resultados



Ejercer puede ser muy divertido, cuando uno inventa cálculos para intercambiarlos con compañeros y compañeras. ¿Quién construirá el monstruo más terrible?

37 Calcular contra el tiempo



En matemática la velocidad nunca es una prioridad. Pero quien tiene una buena vista del paisaje de multiplicación, reconoce mucho con solo una mirada. Por lo tanto, a veces es muy rápido... y a veces muy lento.

40 Números grandes



Como seres humanos debemos mantener una visión global del entorno y crear relaciones entre sus elementos. Gracias a esta habilidad de estimación, superamos a las máquinas.



El paisaje de multiplicación

Peter Gallin, Suiza versión español por Metaaccion, Costa Rica

El paisaje de multiplicación consta de 81 cuadros de madera que representan los resultados de multiplicación de 1×1 hasta 9×9 . Su plataforma base permite construir el paisaje con nueve gradas pegadas una a la otra que representan las filas de multiplicación. A partir de ellas se crean 9 gradas con orientación vertical respecto a las primeras. Así nace un paisaje de multiplicación o el “Monte Cálculo”, el cual permite diversos movimientos que apoyan el entendimiento y aprendizaje autónomo, y la manipulación flexible de la tabla de multiplicación en la primaria (2do y 4to grado). Los cuadros se guardan muy ordenados junto con la plataforma base en una caja de madera. Algunos ejercicios y tareas para el paisaje de multiplicación se encuentran en el cuaderno de aprendizaje “Expedición al Monte Cálculo” de Metaaccion.

Objetivos de aprendizaje

- ✓ Desarrollar la multiplicación de dos números con un dígito, en un proceso natural y regular, que nunca queda en si mismo, sino que se usa para aclarar distintos planteamientos y para descubrir regularidades.
- ✓ Aclarar la relación entre las filas de multiplicación, al colocarlas paralelamente. De esta forma se visualizan las relaciones entre puntos adyacentes, en sentidos perpendiculares. Superamos el límite unidimensional de una determinada secuencia de multiplicación, y ganamos la movilidad bidimensional en el paisaje de multiplicación.
- ✓ Dominar, además del cálculo de productos, la factorización de números enteros (al no haber rotulación de números en las torres de madera). La factorización es determinar los factores primos que componen un producto conocido, lo cual es un proceso superior al de calcular el producto de dos números. Se pueden hacer competencias de velocidad en factorización de números enteros, en parejas o en grupos.
- ✓ Convocar a la extensión mental del paisaje de multiplicación, gracias a la limitación a operadores de un dígito (1 a 9), lo que equivale a desarrollar el pensamiento matemático, que lleva posiblemente hasta la multiplicación de valores negativos.
- ✓ Entrenar valores de procedimiento sistemático y de perseverancia, por medio de dos actividades especiales: colocar y recoger las torres de madera con un sentido lógico.

En el paisaje de multiplicación encontramos gradas con alturas diferentes, directamente una al lado de la otra. Así como en la adición, la multiplicación se percibe como un proceso agotador.

Sin embargo, en el paisaje de multiplicación se pueden encontrar también desvíos (transformaciones agradables) para lograr cálculos más amenos. Su principal enfoque es la factorización de números enteros – lo que es una actividad más valiosa que la misma multiplicación. ¿Cuáles son los cálculos relacionados, cuando te encuentras en determinada torre? No hace falta aclarar que las niñas y los niños se familiarizan con el concepto de adición y substracción, y casi sin sentirlo, conocen la multiplicación y división.

Notificación: Al fondo del paisaje de multiplicación se presenta la gráfica de la función $z = x \times y$, que muestra la forma de un hiperboloide parabólico. Por la finitud del área que se muestra, se crea en la imaginación la idea de continuidad hasta el infinito, casi obligatoriamente. La continuación sobre el punto silla (0,0,0) en la montaña conduce sin mayor esfuerzo al reconocimiento de que menos multiplicado por menos lleva a un resultado positivo. Todos los caminos rectos al nivel de los argumentos (nivel-x-y) lleva a una secuencia aritmética de segundo grado, en los resultados de la multiplicación (altura z). Estas “vías torcidas” muestran, por medio de su estructura parabólica, el lado estético del paisaje de multiplicación, el cual se presenta por ejemplo en la fórmula binómica $(a-x) \cdot (a+x) = aa - ax + ax - xx = a^2 - x^2$ que culmina con el anuncio geométrico de que entre todos los rectángulos con perímetro constante, el cuadrado provee la superficie más grande. En fin, las actividades de colocar y guardar las torres del paisaje de multiplicación, se presentan como ejercicios que exigen ordenar, adicionar secuencias aritméticas de 1er grado, porque realmente se pueden integrar todos los tucos de cada paisaje en un solo bloque grande.

Prueba de lectura:

Tienes que recordar eso.

Déjate mucho tiempo con cada nuevo cálculo.

Nunca preguntes primero por la regla.

No mires cómo lo hacen los demás.

Acomoda el camino del cálculo, primero con toda tranquilidad para ti mismo y en la forma que te guste.

Un cálculo se puede hacer de diferentes formas.

¿Cómo calculas $9 + 8 = \square$?

¿Puedes explicarlo paso por paso?

¿Cuáles fueron tus pensamientos?

Existen realmente muchas formas

de pensar el cálculo $8 + 9 = \square$.

Si no conoces inmediatamente que el resultado es 17, puedes tomar un pequeño desvío.

También $7 + 8 = \square$ es para muchos una tarea difícil.

Pero con este cálculo lo puedes hacer así, o también de otra manera.

Un niño inicia con 7 y sigue contando 8 números más.

Otra niña sabe con mucha seguridad que sumando $7 + 10$ da 17, y resta 2 para tener el resultado.

Otro niño recuerda la canción del Kinder :

$1 + 1 = 2$, $2 + 2 = 4$, $4 + 4 = 8$, $8 + 8 = 16$.

le resta 1 al último 8 (que faltaba al 7) y obtiene el resultado, como con la ayuda de un buen vecino.

Ya que $7 + 8$ es muy cercado al $8 + 8$,

le ayuda la letra de esta canción.

¿Cuál desvío cómodo

te lleva más rápido y seguro a la meta?
